Diofantosa z Aleksandrii

Arytmetyka

Pięć wybranych problemów

Wstęp, przekład z oryginału, komentarz

Adam Czepielik

Pierwsza wersja: 23 lutego 2019 r.
Ostatnia redakcja: 3 lipca 2020 r.

Wstęp

Diofantos z Aleksandrii

Biografie i biogramy mają zwyczaj zaczynać się od przypomnienia lat życia swojego bohatera. W przypadku Diofantosa z Aleksandrii stanowi to niemały problem, bo dokładne lata jego życia nie są znane. Siła zwyczaju jest jednak na tyle duża, że aby uczynić mu zadość, wpisuje się niekiedy przy nazwisku greckiego matematyka lata 201 - 285 lub 215 - 299. Taki zapis jest, świadomą lub nie, syntezą dwóch przekonań: (1) Diofantos żył w III wieku n.e. oraz (2) Diofantos żył 84 lata. Pierwsze z nich, choć opiera się raczej na poszlakach niż na twardych danych, jest dość prawdopodobne. Wiarygodność drugiego jest z kolei mocno wątpliwa.

Pierwszą i najpewniejszą wskazówką do spekulacji na temat czasu życia Diofantosa jest odwołanie do jego dzieł u Teona z Aleksandrii (ojca słynnej Hypatii)[1]. Teon cytuje fragment wstępu do *Arytmetyki* wprost przywołując imię Diofantosa. Na podstawie tej wzmianki możemy oszacować górną granicę datacji tego dzieła. Dokładne lata życia Teona też nie są znane, ale znacznie dokładniejsze niż w przypadku Diofantosa szacunki wskazują na okres od ok. 335 r. do ok. 405 r. Możemy przyjąć, że *Arytmetyka* została napisana, ostrożnie mówiąc, nie później niż na początku V w.

Żeby w podobny sposób ustalić dolną granicę trzeba zobaczyć kogo cytuje sam Diofantos. W *Arytmetyce* nie ma żadnych odwołań do identyfikowalnych tekstów, ale w drugim przypisywanym Diofantosowi traktacie, *O liczbach wielokątnych*, jest jedno odwołanie do Hypsiklesa z Aleksandrii, żyjącego w II w. p.n.e. (dokładne daty nie są znane). Tak więc na podstawie zależności intertekstualnych możemy powiedzieć tylko tyle, że Diofantos

[1] [Heath, 1910] s. 11

żył gdzieś między II w. p.n.e, a IV/V w. n.e. Przy tym o ile górna granica jest raczej pewna, to dolna już niekoniecznie, bo diofantosowe autorstwo *O liczbach wielokątnych* bywa kwestionowane[2].

Wskazówką bardziej precyzyjną dla datacji, ale znacznie mniej pod względem jednoznaczności interpretacji, jest pewien list Michała Psellosa (1018 - [1078, 1096]?), bizantyjskiego polityka i uczonego. Psellos wspomina w nim o dziele poświęconym arytmetyce autorstwa pewnego Anatoliosa, które było dedykowane Diofantosowi. Odkrywca listu, a zarazem autor krytycznej edycji, *Arytmetyki* Paul Tannery (1843-1904), identyfikuje autora rzeczonego dzieła z Anatoliosem z Aleksandrii, biskupem Laodycei pod koniec III w[3], który jak wiemy z przekazu Euzebiusza z Cezarei (HE VII, 20) napisał dzieło o tematyce arytmetycznej, zachowane obecnie we fragmentach. Jeżeli Tannery ma rację, że dedykacja mogła być skierowana tylko do żywej osoby, to Diofantos musiał żyć w trzecim wieku. Manuskrypt listu Psellosa jest jednak uszkodzony i niektórzy badacze sugerują, że Psellosowi mogło chodzić o jakiegoś innego Diofantosa[4].

List Psellosa wskazuje, że Diofantosa należy umiejscowić w czasie w III w. Jeśli jednak nie można w stu procentach zaufać temu źródłu, to jakie są inne możliwości? Pewna hipoteza mówi, że Diofantos mógł żyć w czasach Herona z Aleksandrii. Miałyby świadczyć pewne podobieństwa w notacji (symbol ⩚ jako znak operacji odejmowania) i tematyce rozważanych zagadnień między tymi autorami. Na początku XX w., gdy nie było jeszcze jasne kiedy żył Heron, hipoteza ta była żywo dyskutowana m.in. przez wspomnianego już Tannery'ego ([Tannery, 1895] ss. 535-538, za [Meskens, 2010]), czy sir Thomasa Heatha - autora klasycznej monografii o Diofantosie (zob. [Heath, 1910] s. 306). W 1932 Otto Neugebauer wyliczył, że opisywane przez Herona zaćmienie księżyca musiało mieć miejsce w 62 r. rozstrzygając spór o datację życia tego uczonego. Od tego czasu wiadomo już, że hipotezy inspirowane listem Psellosa i podobieństwami z Heronem wykluczają się. Choć są uczeni, którzy uważają tą drugą za możliwą (np. W. Knorr), to zdecydowanie przeważa opinia, że Diofantos żył w III w. Niezależnie od listu Psellosa przemawia za tym brak odwołań *Arytmetyki* przed Teonem. Gdyby Teon cytował autora o kilkaset lat wcześniejszego, musiałby to raczej być ktoś o statusie klasyka. W takim wypadku spodziewalibyśmy się również innych odwołań do jego dzieł. Tymczasem żadne nie są znane, więc bardziej prawdopodobne jest, że Teon cytował dzieło niewiele starsze od jego własnych.

Przekonanie, że Diofantos żył 84 lata opiera się na pewnym epigramie z *Antologii Greckiej. Antologia* to obszerny zbiór poezji starogreckiej oparty na kompilacji z X w. dokonanej przez bizantyjskiego duchownego i dworzanina Konstantyna Kefalasa. Zbiór Kefalasa nie zachował się w całości, ale dysponujemy redakcją opartą na dwóch jego tekstach pochodnych: niepełnej kopii oryginalnej antologii odkrytej w 1606 r. w Heidelbergu,

[2] [Meskens, 2010], s. 49
[3] [Meskens, 2010], s. 47
[4] ibidem s. 48

zwanej *Antologią Palatyńską*, oraz przeredagowanej wersji Maksyma Planudesa (XIII w.). Materiał zebrany w *Antologii* zawiera wiersze poetów tworzących od IV w. p.n.e. do VI w. n.e. W księdze XIV zatytułowanej *Zagadki, łamigłówki i wyrocznie* znajduje się zbiór 45 epigramów, kryjących w treści zadania arytmetyczne, zebranych przez gramatyka i matematyka Metrodora. Ta kompilacja powstała zapewne w VI w., ale zawiera wiersze w większości starsze. Jednym z nich jest niezatytułowany epigram brzmiący tak[5]:

> Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος ἆ μέγα θαῦμα
> καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
> Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
> δωδεκάτην δ′ ἐπιθείς μῆλα πόρεν χλοάειν
> τῇ δ′ ἄρ′ ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
> ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ′ ἐπένευσεν ἔτει.
> αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
> τοῦδε καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
> πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαντοῖς
> τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

co można prztłumaczyć nastęująco:

> Grób ten chowa Diofanta i - o wielkie dziwy -
> miarę jego żywota przedstawia w sztuce liczb.
> Szóstą mu na dziecięctwo bóg nadał część życia
> Dając skroniom zakwitnąć dwunastą dodał część
> Siódmą, kiedy zapalił małżeństwa pochodnię,
> Po upływie lat pięciu obdarzył potomkiem.
> Ach, biedne dziecko drogie, w połowie lat miary
> swego ojca zimna je mogiła zabrała.
> Ten swoje żale koił w obliczu mądrości
> liczb cztery lata aż kres żywota przekroczył.[6]

Rozwiążmy zagadkę. Niech x oznacza wiek Diofantosa. Wówczas rozwiązując równanie $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$ dostajemy $x = 84$. Nie ma żadnych źródeł, które mogłyby rzucić światło na związek między epitafium przekazanym przez Meteodora, a historycznym Diofantosem. Współcześni badacze bardzo sceptycznie podchodzą do wiarygodności tego epigramu (zob. [Schappacher, 1998] s. 5; w najnowszej monografii o Diofantosie - [Meskens, 2010] - epigram w ogóle nie jest wspomniany).

[5] Za edycją [Paton, 1918]

[6] Przekład własny. Po drukowanych i cyfrowych źródłach krążą dwa polskie tłumaczenia tego ępitafium". To zaczynające się od słów *Tu jest grobowiec w którym złożono prochy Diofanta* jest raczej luźną wariacją na temat oryginalnego tekstu z Antologii, niż przekładem. Nie udało mi się ustalić, gdzie po raz pierwszy pojawia się to tłumaczenie. Drugi przekład, zaczynający się od słów *Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofant* jest bardziej eleganckie literacko i dosyć bliskie oryginałowi. Najstarszym tekstem zawierającym to tłumaczenie, do którego udało mi się dotrzeć, jest popularnonaukowa książka *Od tabliczki do różniczki* (org. *Vom Einmaleins zum Integral*) Egmonta Colerusa, wydana w tłumaczeniu Antoniego Nyklińskiego w 1939 roku nakładem Państwowego Wydawnictwa Książek Szkolnych we Lwowie (ss. 130-131). Nie wiem, czy tłumacz posługiwał się tekstem oryginalnym, czy niemieckim przekładem użytym przez Colerusa.

Tekst *Arytmetyki*

Według tego, co przekazał sam Diofantos, *Arytmetyka* składała się oryginalnie z trzynastu ksiąg. Podobnie jednak jak wiele innych greckich dzieł, traktat ucierpiał mocno w dziejowych zawieruchach. Obecnie mamy dostęp do sześciu ksiąg przekazanych w grece, za pośrednictwem uczonych bizantyjskich, oraz czterech innych w tłumaczeniu arabskim. Tekst, który przetrwał, jest mocno skażony. [Meskens, 2010] twierdzi wręcz, że *Arytmetyka* należy do najgorzej zachowanych starożytnych dzieł greckich.

Od czasów Teona i Hypatii, która również komentowała *Arytmetykę*, aż od IX w. nie ma pewnych przekazów o studiowaniu dorobku Diofantosa. Pod koniec IX w. Qusta ibn Luqa zaszczepia jego znajomość w świecie arabskim, o czym niżej. W świecie greckim pierwszym uczonym, o którym na pewno wiadomo, że zajmował się Diofantosem jest tak naprawdę wspomniany wcześniej Michał Psellos (XI w.). W XII w. Nicefor Blemmydes podaje w swojej autobiografii, że zapoznał się częściowo z *Arytmetyką*. Dla historii tekstu kluczowe znaczenie ma jednak zainteresowanie Diofantosem z czasów renesansu Paleologów, w szczególności postać Maksyma Planudesa.

Pośród swoich licznych prac filologicznych (w tym wspomnianą wcześniej *Antologią*), teologicznych i historycznych, Planudes znalazł w latach 1292-1293 miejsce dla studiów nad *Arytmetyką*. Udało mu się przygotować redakcję traktatu i napisać scholia do dwóch pierwszych ksiąg. Według tego, co można wyczytać w jego listach, miał dostęp do trzech kopii *Arytmetyki*: jednej własnej, jednej pożyczonej od przyjaciela i jednej z biblioteki cesarskiej. Wszystkie zawierały liczne błędy, i choć bizantyjski uczony był tego świadom wiele z nich znalazło się prześlizgnęło się do jego edycji.

Z rękopisu Planudesa, zachowanego szczęśliwie do naszych czasów, wywodzi się większą gałąź manuskryptów *Arytmetyki*, zwana planudejską. Ich cechą charakterystyczną jest kopiowanie scholiów dodanych przez Planudesa. Oprócz tej gałęzi istnieje jeszcze jedna, zwana nieplanudejską. Dwa rękopisy będące jej protoplastami nie są wiele starsze od tego, który rozpoczyna gałąź planudejską: również pochodzą z XIII w. Gałąź nieplanudejska również zawiera liczne błędy. Wykaz manuskryptów i ich pochodzenie podaje [Meskens, 2010, rozdz. 10]

Z dorobku starożytnej nauki greckiej korzystali również uczeni arabscy. O tym, że *Arytmetyka* była znana wśród tamtejszych uczonych było od dawna wiadomo, za sprawą dzieła *al-Fakhri* Al-Karajiego (X/XI w.). Rozwijając teorię Diofantosa, Al-Karaji umieścił w swoim dziele dużą część zagadnień znanych z greckich ksiąg I, II, III.

Prawdziwą sensacją jeśli chodzi o arabskie źródła do krytyki tekstu *Arytmetyki* było odkrycie w 1971 r. arabskiego tłumaczenia czterech ksiąg nieznanych z manuskryptów bizantyjskich. Autorem tłumaczenia jest Qusta ibn Luqa, Grek żyjący w drugiej połowie IX w. i pracujący na dworze w Bagdadzie. Wiadomo dziś, że przetłumaczył on na arabski siedem pierwszych ksiąg *Arytmetyki* i opracował komentarz do dzieła Diofantosa.

Odkryta w perskiej bibliotece parlamentu w Meszhed kopia tego tłumaczenia powstała w 1198 r. Co ciekawe na dokumencie widnieje imię Diofantosa, ale zostało ono zapisane starym pismem kufickim i w skutek problemów z odczytaniem go, manuskrypt został skatalogowany z Qusta ibn Luqa jako autorem[7].

Tekst zawiera księgi oryginalnie znajdujące się na pozycjach IV-VII. Istnieją pewne różnice stylistyczne między tekstem greckim i arabskim: w tym drugim rozwiązania problemów są zazwyczaj dłuższe i bardziej szczegółowe. Znaczenie tych różnic dla krytyki tekstu nie jest do końca jasne i pozostaje przedmiotem dyskusji[8].

Istnieją dwie edycje krytyczne ksiąg greckich: [Tannery, 1895] i [Allard, 1980] oraz dwie arabskich: [Sesiano, 1982], [Rashed, 1984]. [Allard, 1980] to nieopublikowana praca doktorska, trudna do zdobycia. Niektóre wnioski streszcza [Meskens, 2010] (ss.43-45, 173 - 175). Edycja Tannery'ego mimo upływu ponad stu lat od jej wydania ciągle jest podstawą opracowań naukowych. Z niej też korzystam w niniejszym tłumaczeniu, które obejmuje wyimki jedynie z ksiąg greckich.

Zapis w *Arytmetyce*

Możemy za Nesselmannem (zob. [Heath, 1910] s. 78) wyróżnić trzy historyczne etapy rozwoju zapisu algebraicznego. Na etapie retorycznym wszystkie operacje są opisywane pełnymi słowami, a rozwiązanie problemów są ułożone w całości jako prozatorski tekst. Na etapie synkopatycznym najczęściej używane terminy zastępują skróty. Jeżeli skróty łączą się ze sobą, powstają napisy przypominające współczesny zapis, ale nie wyposażone w reguły syntaktyczne, wyabstrahowane ponad poziom języka naturalnego. Ta cecha świadczy już o przejściu do zapisu, który Nesselmann nazywa symbolicznym. Diofantos należy do etapu synkopatycznego i sposób w jaki zapisuje swoje problemy może budzić zdziwienie nieprzygotowanego czytelnika.

Zanim zostaną omówię używane przez niego konwencje, dobrze będzie odnotować dwa fakty. Po pierwsze: bizantyjscy kopiści, za pośrednictwem których mamy dostęp do tekstu *Arytmetyki*, spisali go w minuskule. Ten typ pisma pojawił się w szerokim użyciu dopiero w IX w. Wcześniej tekst musiał być przekazywany w uncjale lub starszych formach majuskułowych. Mimo więc, że język przekazu (zanadto) się nie zmienił zapis z greckich manuskryptów nie jest oryginalny w potocznym sensie. Na szczęście dla współczesnych czytelników wprowadzając w przedmowie swoje oznaczenia opisuje je niekiedy słownie uodparniając w efekcie tekst na błędy kopistów. Po drugie: rękopisy nie tylko odbiegają od autografu, ale różnią się też między sobą. Wydania krytyczne tekstu greckiego optują w niektórych przypadkach za różnymi wariantami. W tym tłumaczeniu posługuję się notacją Tannery'ego.

[7] [Schappacher, 1998] s. 17
[8] [Meskens, 2010] ss. 105-106

W *Arytmetyce* stosowany jest joński zapis liczb: system dziesiętny (bez symbolu 0 rzecz jasna) zapisywany literami greckimi (w tym znakami, które wyszły z użycia). W okresie bizantyjskim używano poziomych kresek dla wyróżnienia liter, które oznaczają liczby

$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\iota}$	10	$\overline{\rho}$	100
$\overline{\beta}$	2	$\overline{\kappa}$	20	$\overline{\sigma}$	200
$\overline{\gamma}$	3	$\overline{\lambda}$	30	$\overline{\tau}$	300
$\overline{\delta}$	4	$\overline{\mu}$	40	$\overline{\upsilon}$	400
$\overline{\epsilon}$	5	$\overline{\nu}$	50	$\overline{\phi}$	500
$\overline{ϛ}$	6	$\overline{\xi}$	60	$\overline{\chi}$	600
$\overline{\zeta}$	7	$\overline{o}$	70	$\overline{\psi}$	700
$\overline{\eta}$	8	$\overline{\pi}$	80	$\overline{\varpi}$	800
$\overline{\theta}$	9	$\overline{ϟ}$	90	$\overline{ϡ}$	900

Ustawiając znaki obok siebie tworzy się większe liczby np. $\overline{\chi\kappa\epsilon}$ to 625. Żeby zapisać tysiące używa się liter powiązanych z cyframi 1-9 z jotą w indeksie dolnym. Dziesiątki tysięcy oznacza się M z napisaną nad tą literą liczbą oznaczającą ile tych dziesiątków tysięcy ma być. Począwszy od stu milionów stosuje się MM zamiast pisania nad literą.

Arytmetyka zaczyna się od przedmowy w której, po dedykacji dla pewnego Dionizego, Diofantos prezentuje serię definicji, twierdzeń i oznaczeń. Zaczyna od stwierdzenia, że *wszystkie liczby składają się z pewnej wielości jednostek* (πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός). Przedmiotem problemów arytmetycznych jest znalezienie liczby (lub liczb), która ma w sobie nieokreśloną wielość jednostek (πλῆθος μονάδον ἀόριστον).Taka liczba jest oznaczana symbolem ς, a przynajmniej tak podają manuskrypty, bo istnieją poważne racje, żeby sądzić, że Diofantos używał innego symbolu. Jeżeli w rozważanym zadaniu występuje więcej niż jedna niewiadoma to czas czas wszystkie są oznaczane tym samym skrótem, a rozróżnienie wynika z kontekstu. Z określenia liczby jako wielości jednostek można by wnioskować, że chodzi o liczby całkowite rzeczywiste według współczesnego nazewnictwa. Czasem Diofantos stosuje pojęcie liczby w ten sposób (pisze np. o najmniejszych liczbach), ale generalnie posługuje się w problemach liczbami wymiernymi dodatnimi. Rozwiązania ujemne uważa za absurdalne[9].

Pewne szczególne liczby, we współczesnej nomenklaturze całkowite potęgi, Diofantos nazywa i oznacza skrótami:

[9] Odmienne, ale raczej odosobnione zdanie prezentuje w tej kwestii [Bashmakova, 1997]

kwadrat (dosł. potęga)	Δ^{Υ}	δύναμις (ΔΥΝΑΜΙΣ)
sześcian	K^{Υ}	κύβος (ΚΥΒΟΣ)
kwadrat-kwadrat	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	δυνμοδύναμις (ΔΥΝΑΜΟΔΥΝΑΜΙΣ)
kwadrat-sześcian	ΔK^{Υ}	δυναμοκύβος (ΔΥΝΑΜΟΚΥΒΙΣ)
sześcian-sześcian	$K^{\Upsilon}K^{\Upsilon}$	κυβόκυβος (ΚΥΒΟΚΥΒΟΣ)

Wyższych potęg wprost nie używa, ale wprowadzając kolejne wykładniki powołuje się milcząco na regułę $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

Dalej Diofantos wprowadza pojęcia oznaczające odwrotności potęg. Odwrotność *arithmos* (ἀριθμὸς, x) to *arithmoston* (ἀριθμοστόν, $\frac{1}{x}$), Odwrotność *dynamis* (δύναμις, x^2) to *dynamoston* (δυναμοστόν, $\frac{1}{x^2}$) i tak dalej. Odwrotności są oznaczane przez dopisanie do odpowiedniego znaku litery χ (w edycji Tannery'ego - w indeksie górnym).

Jedynym wprowadzonym skrótem działania jest ⩚ dla odejmowania. Chociaż, jak zostało powiedziane, Diofantos nie uznaje liczb ujemnych, zna prawa mnożenia liczb *odejmowanych*: odejmowana razy odejmowana daje dodawaną, a odejmowana razy dodawana daje odejmowaną. Symbol dodawania jest w zapisie pomijany, podobnie jak jedyne mnożenie, mnożenie niewiadomej (w różnych potęgach). Wyraz wolny zapisywany jest jako współczynnik razy *jednostka* (monada, μονάς , symbol $\overset{o}{M}$). Przykładowy napis może więc wyglądać następująco: $K^{\Upsilon}\overline{\beta}\varsigma\overline{\eta}$ ⩚ $\Delta^{\Upsilon}\overline{\epsilon}\overset{o}{M}\overline{\alpha}$ to we współczesnej notacji $2x^3+8x-(5x^2+1)$.

Oprócz wprost wprowadzonych we wstępie symboli Diofantos (lub kopiści) okazjonalnie używa innych skrótów lub oznaczeń np. zapisu ułamka w postaci mianownik nad licznikiem oddzielony kreską, skrótu ι^{σ} (od ἴσος) dla równości, czy symbolu $\square$ dla kwadratu. O synkopatycznym charakterze zapisu świadczy, że przy wielu symbolach dopisywane są odpowiednie końcówki fleksyjne np. $\varsigma^{\tilde{\omega}\nu}$ od ἀριθμῶν .

O tłumaczeniu

Tłumaczone w tej pracy problemy zostały wybrane tak, żeby czytelnik mógł dzięki ich lekturze zorientować się po trosze jakimi problemami zajmuje się Diofantos, jakimi metodami je rozwiązuje ale przede wszystkim jaki jest jego styl uprawiania matematyki, jeśli można tak powiedzieć. Łatwo można zauważyć, ze chociaż jego rozwiązania dają się przełożyć na współczesny zapis, i widać, że są bardzo pomysłowe, to wrażenie odmienności między arytmetyką współczesną, a starożytną pozostaje dominujące. Z tego powodu same problemy będą przedstawiane w tłumaczeniu dosłownym, a uwspółcześnienie rozwiązania będzie umieszczane w komentarzu.

Rozdzielenie przekładu i uwspółcześnienia w dwóch miejscach napotyka na konieczność wyboru określonej konwencji. Pierwszym z nich jest tłumaczenie symboli, a właściwie skrótów algebraicznych. W wielu tłumaczeniach używa się po prostu współczesnego zapisu, ale należy chyba zgodzić się z opiniami przytaczanymi przez ([Meskens, 2010] s.52), że gdy zależy nam na wierności przekładu lepiej używać, renesansową manierą, podobnych skrótów jak Diofantos. W języku polskim mogą to być L (od słowa *liczba*) ς, K (od słowa *kwadrat*) dla symbolu Δ^{Υ} i S^{z} (od *sześcian*) dla symbolu K^{Υ}. Znaki dodawania i odejmowania będę zapisywał współczesną notacją, a ułamki z licznikiem na górze, a mianownikiem na dole. Drugim problematycznym miejscem jest opis operacji arytmetycznych. Zdaje się, że najczęściej używane w polszczyźnie słowne ekwiwalenty zapisu $3 + 5$, to *trzy plus pięć* lub *suma trzy i pięć*. *Pięć dodane do trzech* chyba zbyt mocno akcentuje kolejność, żeby używać takiego sformułowania we wszystkich tych sytuacjach, w których oryginał nie zaznacza kolejności. *Trzy i pięć*, choć byłoby dosłownym tłumaczeniem greki, brzmi nieco sztucznie. Postanowiłem wyrażenia rodzaju ἀριθμὸς καὶ ἀριθμὸς tłumaczyć przez *liczba plus liczba*, a te w których pojawiają się słowa σύνθεσις, συναμφοτέρος przez *suma liczby i liczby*. Podobne reguły stosuję do działań mnożenia, choć tutaj słowo iloczyn częściej występuje jako podmiot domyślny, który podaję wprost ze względów stylistycznych. Jeśli chodzi o wyniki działań, to w polszczyźnie sumy i iloczyny na ogół *dają* wyniki, *są równe*, albo *wynoszą*. U Diofantosa mogą *robić*, *stawać się*, po prostu *być*, albo *być równymi*. Traktuję te sformułowania zamiennie z wyjątkiem *jest równy* ze względu na szczególny algebraiczny wydźwięk.

Pięć tłumaczonych problemów zostało dobranych według następującego klucza:

- Na przykładzie zagadnienia 28. z księgi pierwszej będzie pokazana struktura umieszczanych w *Arytmetyce* problemów i rozwiązań. Poszukiwane jest rozwiązanie oznaczonego układu drugiego stopnia.
- W zagadnieniu 20.z tej samej księgi Diofantos prezentuje rozwiązanie jednego z raptem kilku pojawiających się jego dziele układów pierwszego stopnia.
- Równanie podwójne, charakterystyczna dla Diofantosa metoda radzenia sobie z niektórymi układami nieoznaczonymi, jest pokazana na przykładzie zagadnienia 15. z księgi trzeciej.
- Słynne zagadnienie II.8 i odwołujące się do niego III.19 służą pokazaniu, że Diofantos rozumie ogólność osiąganych wyników lepiej niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.

Powyższe przykłady nie wyczerpują najważniejszych kwestii *Arytmetyki*. Bardzo dobrą syntezę dzieła można znaleźć w monografii [Meskens, 2010]. Klasyfikację problemów z ksiąg greckich i omówienie niektórych metod można znaleźć w [Heath, 1910]. Szerszy wybór problemów z *Arytmetyki* można znaleźć w angielskim tłumaczeniu w pracy [Thomas, 1939]

Księga I Zagadnienie 28

Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ἡ σύνθεσις τῶν απ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεί δὴ τοὺς δὶς απ᾽ αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπέχειν τετραγώνῳ. Ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν $\overset{o}{M}\bar{\kappa}$, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν απ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν $\overset{o}{M}\overline{\sigma\eta}$.

Τετάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν $\varsigma\bar{\beta}$. Καὶ ἔστω ὁ μείζων $\varsigma\bar{\alpha}$ καὶ $\overset{o}{M}\bar{\iota}$, τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δέ ἐλάσσων $\overset{o}{M}\bar{\iota}\pitchfork\varsigma\bar{\alpha}$, καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν $\overset{o}{M}\bar{\kappa}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ $\varsigma\bar{\beta}$.

Λοιπόν ἐστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν $\overset{o}{M}\overline{\sigma\eta}$, ἀλλά τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ $\Delta^{\Upsilon}\bar{\beta}\overset{o}{M}\bar{\sigma}$. Ταῦτα ἴσα $\overset{o}{M}\overline{\sigma\eta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{o}{M}\bar{\beta}$.

Ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. Ἔσται ὁ μὲν μείζων $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$, ὁ δὲ ἐλάσσων $\overset{o}{M}\bar{\eta}$. Καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Znaleźć takie dwie liczby, żeby ich suma oraz suma ich kwadratów, dawały podane liczby.

Musi być tak, że dwie [sumy] kwadratów liczb są większe od kwadratu ich sumy o [pewien] kwadrat. To jest *plasmatikon*.

Niech będzie dane, że suma liczb daje 20 jednostek, zaś suma kwadratów 208 jednostek.

Niech ich różnica będzie [równa] $2L$. Dalej, niech większą [liczbą] będzie L plus 10, znowu - połowa sumy, mniejszą zaś $10 - L$. Ponownie, suma pozostaje [równa] 20, a różnica $2L$.

Trzeba jeszcze, żeby suma kwadratów dawała 208 jednostek. Ale suma kwadratów daje $2K + 200$. To jest równe 208 jednostkom, więc L jest [równa] 2 jednostkom.

Przechodząc do wartości liczb: większa będzie równa 12 jednostek, a mniejsza 8 jednostek. I znowu, te liczby spełniają warunki zagadnienia.

Komentarz

- Uwspółcześnienie

  W współczesnej notacji rozważany problem wygląda następująco: dla danych a i b trzeba rozwiązać (oczywiście w $\mathbb{Q}_+$) układ równań

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ x^2+y^2 & = & b \end{array}.$$

  Takie równanie może nie mieć rozwiązania. Diofantos podaje warunek konieczny na a i b, żeby problem był dobrze określony:

$$2b-a^2 = 2(x^2+y^2)-(x+y)^2 = c^2$$

  dla pewnego $c \in \mathbb{Q}$. Rzeczywiście $2(x^2+y^2)-(x+y)^2 = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$. Zauważmy, że jest to również warunek wystarczający: jeżeli jest spełniony, to otrzymamy układ równań

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ x-y & = & c \end{array},$$

  który oczywiście ma rozwiązanie wymierne $(\frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2})$.
  Rozwiązywany przypadek, to $a = 20$ i $b = 208$. Warunek jest spełniony, bo $416 - 20^2 = 16 = 4^2$. We współczesnym stylu przedstawione rozwiązanie można zapisać następująco:

  Przyjmijmy bez straty ogólności, że $x > y$ i przyjmijmy $2z = x - y$. Możemy zauważyć, że $2z+a = 2x$ oraz $2z+b = 2y$. Zatem $x = z+\frac{1}{2}a = z+10$, a $y = z-\frac{1}{2}a = z-10$. Podstawiając do drugiego równania otrzymujemy $(z+\frac{1}{2}a)^2+(z-\frac{1}{2}a)^2 = b$ (po podstawieniu $(z+10)^2+(z-10)^2 = 208$). Po rozwinięciu i uporządkowaniu lewej strony równania otrzymujemy $2z^2+\frac{1}{2}a^2 = b$ (po podstawieniu $2z^2+200 = 208$). Stąd $z = \sqrt{\frac{1}{2}(b-\frac{1}{2}a^2)}$ $(z = 2)$.

  Teraz rozwiązujemy prosty układ

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ x-y & = & 2z \end{array}$$

  i dostajemy $(x, y) = (\frac{a+2z}{2}, \frac{a-2z}{2}) = (12, 8)$.

- Struktura zagadnień w *Arytmetyce*

  Chociaż tematyka dociekań Diofantosa odbiega od głównego nurtu matematyki greckiej, to struktura problemów posiada analogie do struktury konstrukcji obecnej w klasycznych dziełach geometrycznych, a opisanej przez Proklosa [10]. Najpierw zadawany jest problem w postaci ogólnej. W niektórych zagadnieniach podawany

[10] [Meskens, 2010] s. 57

jest następnie warunek konieczny na istnienie rozwiązania lub lemat, często bez dowodu. Dalej następuje dosyć szokujący w pierwszym odruchu element: Diofantos przestaje zajmować się ogólnie zadanym problemem i podstawia konkretne wartości liczbowe dla których rozwiązuje równanie bądź układ równań (w przypadku układów nieoznaczonych zadowala się jednym rozwiązaniem). Zobaczymy jednak dalej, że nie musi to oznaczać, że nie jest świadomy ogólności swojej metody. Następnie Diofantos rozwiązuje zadanie i sprawdza zgodność wyniku.

- Uwagi translatorskie
  1. W sześciu spośród zagadnień w których wprowadzany jest warunek konieczny Diofantos dodaje zagadkowy komentarz Ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν (I.27, I.28, I.30, IV.17, IV.19, V.7). Istnieją duże rozbieżności wśród uczonych co do tego, jak należy rozumieć i tłumaczyć ten zwrot. Przegląd stanowisk i obszerne wyjaśnienia podaje [Acerbi, 2009]
  2. Słowo *znowu* w czwartym akapicie jest odniesieniem do podobnego zabiegu zastosowanego w zagadnieniu I.27.
  3. Ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις tłumaczę podążając za interpretacją [Christianidis, 2015]

Księga I Zagadnienie 20

Tὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπος ἑκάτερος τῶν ἄκρων προσλαβὼν τὸν μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἄκρων λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δή τὸν $\overline{\rho}$ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπος ὁ $\alpha^{o\varsigma}$ (πρῶτος - przyp. tłum.) καὶ ὁ $\beta^{o\varsigma}$ (δεύτερος - przyp. tłum.) τοῦ γ^{ov} (τρίτου - przyp. tłum.) ᾖ $\gamma^{\pi\lambda\cdot}$ (τριπλασίων - przyp. tłum.),ὁ δέ $\beta^{o\varsigma}$ καὶ ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ τοῦ α^{ov} ᾖ $\delta^{\pi\lambda}$.

Τετάχθω ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ $\varsigma\overline{\alpha}$ καὶ ἐπεὶ ὁ $\alpha^{o\varsigma}$ καὶ ὁ $\beta^{o\varsigma}$ τοῦ γ^{ov} ἐστὶ $\gamma^{\pi\lambda\cdot}$, τετάχθωσαν οἱ δύο $\varsigma\overline{\gamma}$. Οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν $\varsigma\overline{\delta}$ οὗτοι ἴσοι $\overset{o}{M}\overline{\rho}$ καί γίνεται ὁ ς $\overset{o}{M}\overline{\kappa\epsilon}$.

Ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. Ἔταξα τὸν $\gamma^{o\nu}$ $\varsigma\overline{\alpha}$ ἔσται $\overset{o}{M}\overline{\kappa\epsilon}$ τὸν δὲ $\alpha^{o\nu}$ καὶ τὸν $\beta^{o\nu}$ $\varsigma\overline{\gamma}$ ἔσονται $\overset{o}{M}\overline{o\epsilon}$.

Πάλιν ἐπεὶ ὀ $\beta^{o\varsigma}$ καὶ ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ τοῦ α^{ov} εἰσὶ $\delta^{\pi\lambda}$, τετάχθω ὁ $\alpha^{o\varsigma}$ $\varsigma\alpha$. Ἔσται ἄρα ὁ $\beta^{o\varsigma}$ καὶ ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ $\varsigma\overline{\delta}$ οἱ τρεῖς ἄρα εἰσίν $\varsigma\overline{\epsilon}$, ἀλλά καὶ $\overset{o}{M}\overline{\rho}$ καὶ γίνεται ὁ ς, $\overset{o}{M}\overline{\kappa}$.

Ἔσται ἄρα ὁ $\alpha^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\kappa}$ ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ καί ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\pi}$, ὧν ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\kappa\epsilon}$, λοιπὸς ἄρα ὁ $\beta^{o\varsigma}$ ἔσται $\overset{o}{M}\overline{\nu\epsilon}$ καί ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Podzielić daną liczbę na takie trzy liczby, że każda ze skrajnych, z dodaną środkową, jest względem pozostałej skrajnej w zadanej proporcji.

Niech będzie trzeba podzielić 100 na trzy liczby tak, że suma pierwszej i drugiej jest trzy razy większa od trzeciej, a suma drugiej i trzeciej jest cztery razy większa od pierwszej.

Niech trzecią liczbą będzie L. Jako że suma pierwszej i drugiej jest trzy razy większa od trzeciej muszą one dawać $3L$. Trzy [liczby] są więc [razem równe] $4L$, co jest równe 100, co daje, że L jest równa 25.

Przechodząc do wartości liczb. Jako trzecią liczbę wziąłem L, co będzie równe 25, zaś jako sumę pierwszej i drugiej $3L$, co będzie równe 75.

Ponownie, jako że suma drugiej i trzeciej liczby jest czterokrotnie większa od piwerszej, niech pierwszą liczbą będzie L. Wtedy suma drugiej i trzeciej będzie równa $4L$. Suma trzech będzie więc równa $5L$ ale i 100, więc L będzie 20.

Pierwszą liczbą będzie więc 20, a sumą drugiej i trzeciej 80. Jako że trzecią liczbą jest 25, pozostaje, że drugą będzie 55 i [takie liczby] spełniają postawiony warunek.

Komentarz

Widzieliśmy już co znaczy *podzielić daną liczbę na kilka.* W tym zagadnieniu jednym z równań będzie

$$x + y + z = a$$

dla zadanego a. Pod enigmatycznymi nazwami liczb skrajnych i środkowej nie kryje się porządek w $\mathbb{Q}_+$, tylko porządek zapisu: przyjmując notację wyżej skrajne to x i z, a środkowa to y. Do pierwszego równania dochodzą nam więc dwa kolejne:

$$\begin{aligned} x + y &= bz \\ y + z &= cx \end{aligned}$$

dla pewnych b i c.

Diofantos rozwiązuje ten układ równań dla podstawień $a = 100$, $b = 3$ oraz $c = 4$.

Najpierw, w pierwszym równaniu używa podstawienia $x + y = 3z$ (drugie równanie), skąd dostaje $4z = 100$, więc $z = 25$. Następnie powtarza ten sam schemat podstawiając trzecie równanie. Otrzymuje $5x = 100$, skąd wnioskuje, że $x = 20$. Żeby suma $x + y + z$ była rzeczywiście równa 100, y musi być równe 55.

Księga III Zagadnienie 15

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμὺς ὅπος ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον.

Πὰντων δή δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ τετράγωνον.

Τετάχθω τοίνυν ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\delta}$, ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\theta}$, ἵνα ὁ ὑ` αὐτῶν γενόμενος $\square^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\lambda\varsigma}$, προσλαβὼν συναμφότερον, ποιῇ $\square^{o\nu}$. Λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ β^{ov} καὶ γ^{ov} προσλαβόντα συναμφότερον καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ γ^{ov} καὶ α^{ov} προσλαβὸντα συναμφότερον ποιεῖν $\square^{o\nu}$.

Τετὰχθω ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ $\varsigma\overline{\alpha}$, καί γίνεται ὁ ὑπο β^{ov} καὶ γ^{ov}, προσλαβὼν συναμφοτέρους, $\varsigma\overline{\iota}\overset{o}{M}\overline{\theta}$ ἴσος $\square^{\omega}$, καὶ ἔτι ὁ ὑπο γ^{ov} καὶ α^{ov}, προσλαβὼν συναμφοτέρους $\varsigma\overline{\epsilon}\overset{o}{M}\overline{\delta}$ ἴσος $\square^{\omega}$ καὶ γίνεται πάλιν καὶ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις καὶ ἔστιν ἡ ὑπoροχὴ $\varsigma\overline{\epsilon}\overset{o}{M}\overline{\epsilon}$. Ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπο ἐστιν $\varsigma\overline{\epsilon}\overset{o}{M}\overline{\epsilon}$. Καὶ εἰσιν ὧν τὸ ὑπο ποιεῖ τὴν ὑπεροχήν, ὅς μὲν $\varsigma\overline{\alpha}\overset{o}{M}\overline{\alpha}$, ὅς δὲ $\overset{o}{M}\overline{\epsilon}$. Καί ὁμοίως [τὸ ἐν τῷ δευτερῳ] ἡ τῆς συνθέσεως αὐτῶν τὸ ἥμισυ ἐφ` ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι ἡ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἤεμισυ ̔ἐφ` ἑαυτὸ ̓ ἴσον τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{o}{M}\overline{\kappa\eta}$.

Καὶ ἔστιν ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\delta}$, ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\theta}$, ὁ δὲ $\gamma^{o\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\kappa\eta}$. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Znaleźć takie trzy liczby, że iloczyn dwóch dodany do ich sumy daje kwadrat.

[Iloczyn] każdych dwóch kolejnych kwadratów dodany do ich sumy daje kwadrat.

Niech więc pierwszą liczbą będzie 4, a drugą 9, których iloczyn będąc kwadratem - 36 - po dodaniu ich sumy daje kwadrat. Pozostaje, żeby [iloczyn] drugiej i trzeciej liczby, dodany do ich sumy, oraz [iloczyn] trzeciej i pierwszej liczby, dodany do ich sumy, dawały kwadrat.

Niech trzecią liczbą będzie L. Wówczas iloczyn drugiej i trzeciej dodany do sumy wynosi $10L + 9$ i jest równy kwadratowi oraz iloczyn trzeciej i pierwszej dodany do sumy wynosi $5L + 4$ i jest równy kwadratowi i znowu powstaje równanie podwójne, różnica wynosi $5L + 5$. Szukam więc znowu takich liczb, których iloczyn jest równy $5L + 5$. Liczbami których iloczyn daje tę różnicę są $L + 1$ i 5. I podobnie [jak w drugim [a]] połowa ich sumy pomnożona przez siebie jest równa większej, zaś połowa różnicy jest równa mniejszej i wychodzi L równa 28.

Pierwszą liczbą jest 4, drugą 9, trzecią zaś 28, co spełnia postawiony warunek.

[a]prawdopodobnie glossa, odniesienie niejasne

Komentarz

- Uwspółcześnienie

  Nieoznaczonym układem równań dla którego trzeba znaleźć rozwiązanie jest

$$\begin{aligned} xy + x + y &= a^2 \\ yz + y + z &= b^2 \\ xz + x + z &= c^2 \end{aligned}$$

  Na początku Diofantos podaje, bez dowodu lemat: dla każdej liczby naturalnej k suma $k^2 \cdot (k+1)^2 + k^2 + (k+1)^2$ jest kwadratem (liczby naturalnej). Istotnie,

$$k^2 \cdot (k+1)^2 + k^2 + (k+1)^2 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2$$

  Biorąc $x = 4$ i $y = 9$ mamy spełnione pierwsze równanie: $4 \cdot 9 + 4 + 9 = 36 + 13 = 49 = 7^2$. Pozostałe dwa przyjmują postać (taki układ Diofantos nazywa równaniem podwójnym):

$$\begin{aligned} 10z + 9 &= b^2 \\ 5z + 4 &= c^2 \end{aligned}$$

  Odejmując stronami otrzymujemy $5z + 5 = b^2 - c^2$. Prawą stronę tego równania możemy równie dobrze zapisać jako iloczyn dwóch liczb $(b + c)(b - c)$. Jeżeli zapiszemy, że $b + c = p$, a $b - c = q$ możemy otrzymać $b = \frac{p+q}{2}$ i $c = \frac{p-q}{2}$. Pasujące p i q łatwo w tym wypadku znaleźć: wystarczy wziąć $p = z + 1$ i $q = 5$. Wówczas $b = \frac{z+1+5}{2}$, a $c = \frac{x+1-5}{2}$. Podstawiając do $10z + 9 = b^2$ otrzymujemy równanie kwadratowe na z. Rozwiązując je (zauważmy, że wyrazy wolne się zredukują) otrzymujemy $z = 28$.

- Ogólnie Diofantos używa równani podwójnego do układów równań

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \alpha^2 \\ dx^2 + ex + f &= \beta^2 \end{aligned}$$

  w których dobiera współczynniki tak, żeby albo a było równe b, albo c równe f. Pierwszy rodzaj, prowadzący do układów liniowych pojawia się częściej w księgach greckich, drugi w arabskich. W księgah arabskich znajdziemy też podobne układy wyższych stopni (zob. [Meskens, 2010] ss.83-85)

Księga II Zagadnienie 8

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγονωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\iota\varsigma}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ $\alpha^{o\varsigma}$ $\Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται $\overset{o}{M}\overline{\iota\varsigma} \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}$, δεήσει ἄρα $\overset{o}{M}\overline{\iota\varsigma} \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}$ ἴσας εἶναι $\square^{\omega}$ (τετραγώνῳ - przyp. tłum.).

Πλάσσω τὸν $\square^{o\nu}$ ἀπὸ $\varsigma^{\tilde{\omega}\nu}$ (ἀριθμῶν - przyp. tłum.) ὅσων δήποτε $\pitchfork$ τοσούτων $\overset{o}{M}$ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν $\overline{\iota\varsigma}\overset{o}{M}$ πλευρά: ἔστω $\varsigma\overline{\beta} \pitchfork \overset{o}{M}\overline{\delta}$. Αὐτὸς ἄρα ὁ $\square^{o\varsigma}$ ἔσται $\Delta^{\Upsilon}\overline{\delta}\overset{o}{M}\overline{\iota\varsigma} \pitchfork \varsigma\overline{\iota\varsigma}$ ταῦτα ἴσα $\overset{o}{M}\overline{\iota\varsigma} \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}$. Κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Δ^{Υ} ἄρα $\overline{\epsilon}$ ἴσαι $\varsigma\overline{\iota\varsigma}$ καὶ γίνεται ὁ ς $\overline{\iota\varsigma}$ πέμπτων.

Ἔσται ὁ μὲν $\frac{\kappa\epsilon}{\sigma\nu\varsigma}$, ὁ δὲ $\frac{\kappa\epsilon}{\rho\mu\delta}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\frac{\kappa\epsilon}{\nu}$, ἤτοι $\overset{o}{M}\overline{\iota\varsigma}$, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

Podany kwadrat podzielić na dwa kwadraty.

Niech będzie trzeba podzielić 16 na dwa kwadraty.

Niech pierwszym będzie K, wtedy innym będzie $16 - K$ i trzeba będzie, żeby $16 - K$ było kwadratem.

Tworzę kwadrat z L jakiejkolwiek wielkości minus taka wielkość, która jest pierwiastkiem (dosł. bokiem - przyp. tłum) 16: niech to będzie $2L - 4$. Sam kwadrat to będzie wtedy $4K + 16 - 16L$, co jest równe $16 - K$. Po obu stronach (dosł. wspólnie - przyp. tłum.) dodaj to co odejmowane i [odejmij] podobne od podobnego.

Wtedy $5K$ równa się $16L$ i zostaje L równa piątej części 16.

Jedną liczbą będzie więc $\frac{256}{25}$, a drugą $\frac{144}{25}$. Ich sumą jest $\frac{400}{25}$ lub 16 i obydwie są kwadratami.

Komentarz

Trzeba znaleźć takie $x, y \in \mathbb{Q}$, żeby $x^2 + y^2$ było równe a^2, dla pewnego $a \in \mathbb{Q}$. W tym wypadku $a = 4$, ale prezentowana przez Diofantosa metoda działa ogólnie, z czego będzie on, jak zobaczymy, korzystał w zagadnieniu III.19.
Do rozwiązania wystarczy znaleźć takie y, żeby $y^2 = a^2 - x^2$ $(16 - x^2)$ było kwadratem. Diofantos stosuje podstawienie $y = kx - a$, wybierając $k = 2$. Podstawiając otrzymuje równanie kwadratowe $a^2 - x^2 = k^2x^2 - 2akx + a^2$ $(16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16)$. Wyraz a^2 zredukuje się i zostanie $x((k^2 + 1)x - 2ak) = 0$, skąd $x = \frac{2ak}{k^2+1}$. Znając wartość x możemy łatwo wyliczyć y oraz kwadraty tych dwóch liczb.

Ciekawostka: To właśnie na marginesie tego zagadnienia Pierre de Fermat poczynił słynną notatkę w której sformułował twierdzenie nazwane potem *Wielkim Twierdzeniem Fermatte'a.*

Księga III Zagadnienie 19

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμος ὅπος ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τεσσάρων τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπεὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινοῦσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν δὶς ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἐάν τε λείψῃ, ποιεῖ τετράγωνον, ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας: τὸ δ᾽ αὐτό ἐστι τετράγωνόν τινα διελεῖν εἰς δύο τετραγῶνους <τετραχῶς>, καὶ ἐμάθομεν τὸν δοθέντα $\square^{o\nu}$ διελεῖν εἰς δύο $\square^{o\upsilon\varsigma}$ ἀπειραχῶς.

Νῦν οὖν ἐκθώμεθα δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν, οἷον $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\epsilon}$: $\overline{\epsilon}$, $\overline{\iota\beta}$, $\overline{\iota\gamma}$. Καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ἐκκειμένων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑτέρου, καί ἔσται τὸ μὲν $\alpha^{o\nu}$ τρίγωνον, $\overline{\lambda\theta}$. $\overline{\nu\beta}$, $\overline{\xi\epsilon}$ τὸ δὲ $\beta^{o\nu}$ $\overline{\kappa\epsilon}$, $\overline{\xi}$, $\overline{\xi\epsilon}$. Καὶ ἔστιν ὀρθογωνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας.

Ἔτι δὲ φυσικῶς ὁ $\overline{\xi\epsilon}$ διαιρεῖται εἰς τετραγώνους διχῶς, εἰς τε τὸν $\overline{\iota\varsigma}$ καὶ τὸν $\overline{\mu\theta}$, ἀλλά μὴν καὶ τὸν $\overline{\xi\delta}$ καὶ τὴν $\overset{o}{M}$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ $\overline{\xi\epsilon}$ ἀριθμὸς περιέχεται ὑπο τοῦ $\overline{\iota\gamma}$ καὶ τοῦ $\overline{\epsilon}$, ὧν ἕκαστος διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους.

Νῦν τῶν ἐκκειμένων, τοῦ τε $\overline{\mu\theta}$ καὶ τοῦ $\overline{\iota\varsigma}$, λαμβάνω τὰς πλευγάς εἰσὶν δὲ $\overline{\zeta}$ καὶ $\overline{\delta}$, καὶ πλάσσω τὸ τριγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο τοῦ τε $\overline{\zeta}$ καὶ τοῦ $\overline{\delta}$ καὶ ἔστι $\overline{\lambda\gamma}$, $\overline{\nu\varsigma}$, $\overline{\xi\epsilon}$.

Znaleźć cztery takie liczby, że kwadrat ich sumy po dodaniu dowolnej z nich, lub po odjęciu, daje kwadrat.

Jako że we wszystkich trójkątach prostokątnych kwadrat przeciwprostokątnej, po dodaniu lub po odjęciu podwojonego iloczynu przyprostokątnych, daje kwadrat, szukam najpierw czterech trójkątów prostokątnych o równych przeciwprostokątnych. To jest to samo co podzielić pewien kwadrat na dwa kwadraty <na cztery sposoby>, a nauczyliśmy się dzielić dany kwadrat na dwa kwadraty na nieskończenie wiele sposobów.

Miejmy teraz ułożone dwa trójkąty prostokątne z najmniejszych liczb tj. (3, 4, 5), (5, 11, 13). Pomnóż każdy z boków jednego trójkąta przez przeciwprostokątną drugiego; pierwszy trójkąt będzie równy (39, 52, 65), zaś drugi (25, 60, 65). Są to trójkąty prostokątne o tej samej przeciwprostokątnej.

Co więcej, 65 naturalnie dzieli się na kwadraty dwojako: na 16 i 49 ale również na 64 i 1 jednostkę. To wynika z tego, że liczba 65 jest iloczynem 13 i 5, które obydwie rozkładają się na dwa kwadraty.

Teraz z ustalonych 49 oraz 16 wyciągam pierwiastki, są to 7 i 4, i formuję trójkąt prostokątny z tych dwóch liczb (7 i 4): 33, 56, 65.

Ὁμοίως καί τοῦ $\overline{\xi\delta}$ καὶ τῆς $\overset{o}{M}$ αἱ πλεθραὶ $\overline{\eta}$ καὶ $\overline{\alpha}$, καὶ πλάσσω πάλιν ἀπ᾽ αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ $\overline{\iota\varsigma}$, $\overline{\xi\gamma}$, $\overline{\xi\epsilon}$.

Καὶ γίνεται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ποτεινοσας, ἐλθὼν οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τεσσάρων, $\varsigma\overline{\xi\epsilon}$, ἕκαστον δὲ τούτων τῶν τεσσάρων, Δ^{Υ} τοσούτων ὅσων ἐστὶ $\delta^{\pi\lambda.}$ τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸν μὲν $\alpha^{o\nu} < \Delta^{\Upsilon}, \overline{{}_{\iota}\delta\nu\varsigma}$, τὸν δὲ $\beta^{o\nu}$ $\Delta^{\Upsilon}, \overline{{}_{\iota}\gamma}$, τὸν δὲ $\gamma^{o\nu} > \Delta^{\Upsilon}, \overline{{}_{\iota}\gamma\chi\kappa\varsigma}$, καὶ ἔτι τὸν $\delta^{o\nu}$ $\overline{{}_{\iota}\beta\iota\varsigma}$.

Καὶ εἰσιν οἱ τέσσαρες Δ^{Υ} $\alpha M\overline{{}_{\iota}\beta\psi\xi\eta}$ ἴσοι $\varsigma\overline{\xi\epsilon}$, καί γίνεται ὁ ς μορίου $\alpha M\overline{{}_{\iota}\beta\psi\xi\eta}$, $\overline{\xi\epsilon}$.
Ἐπὶ τὰς ὑποστασεις. Ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ ${}_{\iota}\alpha\psi\iota\gamma M\overline{{}_{\iota}\varsigma\chi}$ ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ ${}_{\iota}\alpha\sigma\xi\zeta M\overline{{}_{\iota}\epsilon}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ, ὁ δὲ $\gamma^{o\varsigma}$ ${}_{\iota}\alpha\phi\xi\alpha M\overline{{}_{\iota}\epsilon\xi}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ, ὁ δὲ $\delta^{o\varsigma}$ $\omega\nu\alpha M\overline{{}_{\iota}\zeta\xi}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ μόριον $\alpha M M_{\iota}\varsigma\tau\beta M\overline{{}_{\iota}\alpha\omega\xi\delta}$.

Podobnie pierwiastkami 16 i 1 jednostki są 4 i 1. Znowu formuję z nich trójkąt prostokątny, którego bokami są 16, 63, 65.

Powstają cztery trójkąty prostokątne mające równe przeciwprostokątne. Przechodząc więc do początku zagadnienia, biorę jako sumę czterech [liczb] $65L$, a jako poszczególne liczby K pomnożone przez (dosł. w ilości takiej jak) dwa pola [kolejnych trójkątów]: jako pierwszą $4056K$, jako drugą $3000K$, jako trzecią $3696K$ i jako czwartą $2016K$.

Suma czterech liczb wynosi $12768K$, co jest równe $65L$ i zostaje, że L jest równa 65 podzielone przez 12768.

Przechodząc do wartości liczb. W pierwszej liczbie licznikiem będzie 17136600, w drugiej 126750000, w trzeciej 15615600, w czwartej 8517600, a wspólnym mianownikiem będzie 163021824.

Komentarz

Zagadnienie III.19 należy do najbardziej skomplikowanych zadań w *Arytmetyce*, a w jego rozwiązaniu Diofantos daje prawdziwy popis swoich umiejętności. Tannery sugeruje w swojej edycji krytycznej, że zagadnienie to oryginalnie kończyło trzecią księgę stanowiąc punkt kulminacyjny dotychczasowych rozważań.

Do rozwiązania jest układ ośmiu równań:

$$\begin{array}{rcl}(x+y+z+t)^2 \pm x & = & a^2\\(x+y+z+t)^2 \pm y & = & b^2\\(x+y+z+t)^2 \pm z & = & c^2\\(x+y+z+t)^2 \pm t & = & d^2\end{array}$$

Po postawieniu problemu Diofantos formułuje zagadnienie pomocnicze: trzeba znaleźć cztery pary $k_i, l_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$, takie że dla pewnego m:

$$k_i^2 + l_i^2 = m^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

Powyższe równania można zinterpretować geometrycznie jako równania twierdzenia Pitagorasa dla czterech różnych trójkątów prostokątnych o tej samej przeciwprostokątnej. Po znalezieniu odpowiednich liczb będziemy mieli zależności

$$m^2 - 2k_il_i = k_i^2 + l_i^2 - 2k_il_i = (k_i - l_i)^2 \tag{2}$$

Zanim zobaczymy jak Diofantos rozwiązuje problem pomocniczy, zapytajmy w czym on właściwie pomaga. Załóżmy, że znaleźliśmy jakieś pasujące $k_i, l_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ oraz m. Gdyby było tak, że

$$m = 2k_1l_1 + 2k_2l_2 + 2k_3l_3 + 2k_4l_4 \tag{3}$$

mielibyśmy rozwiązanie oryginalnego problemu. Tak jednak być nie musi. Aby m było odpowiednie możemy jednak przemnożyć wszystkie k_i, l_i i m przez odpowiednie C. W miejsce równości (2) będziemy wówczas mieli równości

$$C^2m^2 - 2(C \cdot k_i)(C \cdot l_i) = C^2(k_i - l_i)^2 \tag{4}$$

a do rozwiązania oryginalnego problemu, zamiast (3) będziemy potrzebować

$$Cm = 2(C \cdot k_1)(C \cdot l_1) + 2(C \cdot k_2)(C \cdot l_2) + 2(C \cdot k_3)(C \cdot l_3) + 2(C \cdot k_4)(C \cdot l_4) \tag{5}$$

Łatwo jednak zauważyć, że (5) zachodzi dla $C = \frac{m}{2k_1l_1+2k_2l_2+2k_3l_3+2k_4l_4}$.

Przejdźmy więc do rozwiązania problemu pomocniczego. Można zauważyć, że jest on podobnej postaci jak zagadnienie II.8. Widzieliśmy, że Diofantos rozkładał na sumę kwadratów tylko liczbę 16 i w wybrał tylko jedno podstawienie w $y = kx - a$. Tu jednak pisze, że czytelnik wie już jak ogólnie rozkładać kwadraty na sumę dwóch kwadratów i to na nieskończenie wiele sposobów.

Wybór konkretnych podstawień w zagadnieniach nie musi więc oznaczać, że autor *Arytmetyki* traci z oczu ogólność rozwiązania. Z drugiej strony trzeba mieć w pamięci, że wiele podstawień jest celowo tak dobranych, żeby równanie dało się łatwo rozwiązać. Na przykład w zagadnieniu 17 z szóstej księgi arabskiej rozwiązuje równanie $x^2+x^4+x^8 = y^2$ znajdując $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{81}{256}$. W 1998 r. Joseph Wetherell udowodnił[11] przy pomocy nowoczesnych twierdzeń z zakresu teorii krzywych eliptycznych, że jest to jedyne rozwiązanie w $\mathbb{Q}_+$! Patrząc jednak na sam tekst *Arytmetyki* nie sposób odróżnić ogólnych twierdzeń od partykularnych rozwiązań.

Chociaż Diofantos zauważa powiązanie problemu pomocniczego z zagadnieniem II.8, i na tej podstawie wnioskuje o jego rozwiązywalności (skoro kwadrat można rozłożyć na sumę dwóch kwadratów na nieskończenie wiele sposobów, to w szczególności można na cztery), to używa innego, bardziej geometrycznego sposobu do jego rozwiązania.
Najpierw bierze dwie najmniejsze trójki pitagorejskie: (3,4,5) i (5,11,13) i formuje z nich trójkąty prostokątne. Następnie boki każdego z nich mnoży przez długość przeciwprostokątnej drugiego trójkąta otrzymując dwa trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej

[11] [Schappacher, 1998] s. 24

65, mianowicie (39, 52, 65) i (25, 60, 65).

Liczba 65 jest iloczynem 5 i 13, które są sumami kwadratów: odpowiednio 1 i 4 oraz 4 i 9. Liczbę która jest iloczynem sum kwadratów można rozłożyć (*naturalnie*, jak pisze Diofantos) na sumy kwadratów według zależności (uwaga na konflikt oznaczeń):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (bc - ad)^2 + (bd + ac)^2 \tag{6}$$

W tym wypadku $65 = 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2$. Po co takie rozbicie? Mając dane dwie liczby $p > q$ możemy zbudować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $p^2 - q^2$ i $2pq$ oraz przeciwprostokątnej $p^2 + q^2$. Dzięki (6) mamy dwa rozbicia przeciwprostokątnej o długości 65 na $p^2 + q^2$. Wystarczy teraz, że wyliczymy pozostałe boki i otrzymamy dwa kolejne trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej 65: (33, 56, 65) oraz (16, 63, 65). To kończy rozwiązanie problemu pomocniczego.

Literatura

[Acerbi, 2009] Acerbi, F. (2009). The meaning of plasmatikon in diophantus' arithmetica. *Archive for history of exact sciences*, 63(1):5–31.

[Allard, 1980] Allard, A. (1980). *Diophante d'Alexandrie, les Arithmétiques: histoire du texte grec, éditions critique, traductions, scolies.*

[Bashmakova, 1997] Bashmakova, I. (1997). *Diophantus and Diophantine Equations.* Math. Ass. of America.

[Christianidis, 2015] Christianidis, J. (2015). *The Meaning of Hypostasis in Diophantus' Arithmetica*, pages 315–327. Springer International Publishing, Cham.

[Heath, 1910] Heath, T. L. (1910). *Diophantus of Alexandria: a study in the history of Greek algebra.* Cambridge University Press. https://archive.org/details/diophantusofalex00heatiala.

[Meskens, 2010] Meskens, A. (2010). *Travelling Mathematics - The Fate of Diophantos' Arithmetic.* Science Networks. Historical Studies. Springer Basel.

[Paton, 1918] Paton, W. (1918). *The Greek Anthology.* London: William Heinemann, New York: G.P. Putnam's sons.

[Rashed, 1984] Rashed, R. (1984). *Diophante, Les Arithmétiques.* Les Belles Lettres.

[Schappacher, 1998] Schappacher, N. (1998). Diophantus of alexandria: a text and its history.

[Sesiano, 1982] Sesiano, J. (1982). *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic trans- lation attributed to Qusta ibn Luqa.* Springer.

[Tannery, 1895] Tannery, P. (1895). *Diophanti Alexandrini Opera omnia: cum graecis commentariis*, volume 2. Teubner. https://archive.org/details/diophantialexan00plangoog.

[Thomas, 1939] Thomas, I. (1939). *Selections illustrating the history of Greek mathematics*. Harvard University Press. https://archive.org/details/selectionsillust02bulmuoft.